648. 位相幾何學ノ形式化(I)

寺阪　英孝（阪大）

Kuratowski ノ名著 Topologie ニヨッテ集合論的位相幾何學ノ Formalisierung ガ廣ク紹介サレタガ、集合全体ノ性質又ハ集合間ノ関係ダケガ問題デ個々ノ点ニ於ケル局所的状態ハ考ヘズニスマセタイトキハ殊ニ形式的計算法ガ望マシイ。

然シ Kuratowski ノ記号ハ余リ取扱ヒ易クナイ。例ヘバ開集合ダケデ適当ニ和ト積トヲ定義シテソレガ環ヲツクルヨウニセヨト云フ問題ヲ考ヘテ見ルト，ソレニハ所謂正則集合（即チ閉集合ノ内部ニナッテキルヤウナ集合）ダケニ局限シテ，A, B ノ和 $A \oplus B$ トシテハ $A+B-AB$ ノ閉包ノ内部，即チ

$$A \oplus B = I(\overline{A+B-AB})$$

ヲトリ，積トシテハ AB ヲトルコトニスレバヨイノデアルガ，コレガ環ヲ造ルコトヲ云フタメニ先ヅ結合律ガ満足サレテキルコトヲ証明シナケレバナラヌ。所ガコレハ

$$(A \oplus B) \oplus C = I\left(\overline{I(\overline{A+B-AB})+C-I(\overline{A+B-AB})C}\right)$$

$$A \oplus (B \oplus C) = I\left(\overline{I(\overline{B+C-BC})+A-I(\overline{B+C-BC})A}\right)$$

ノ等シイコトヲ証明スルコトニナルノダカラ、ウンザリシテ了フ。コレヲモ少シ解リヨク取扱フタメニ先ヅ集合計算ヲ更ニ形式化シ，色々公式等ヲ出シテ最後ニ上式ノ等シイコトヲ証明シヨウト思フ。コヽデヤル方法ハ何モ新ラシイモノデナ

ク探セバ処々ニ散見スル(例ヘバStone, Birkhoff, Ore)シ, 結果モKuratowski ノ本ニ大概アルケレドモ, 何カノ才役ニ立テバト思ッテ冗漫ヲモ省リミズ本紙ヲ借リルコトニシタ。コレハ阪大デノ特別講義ノ一部デアル。

§1. A, B, X等ハ抽象的ニ與ヘラレタ集合(單ナル文字トモ云ヘル)デアッテ, A, B ニ對シ $A+B$(和) 及ビ AB(積) ガ一意ニ對應シ, 尚 A^c (A ノ補集合ニ相當スル) 及ビ A^a (A ノ閉苞、即チ通常 $\overline{A}$ ト書クモノ) ガ矢張リ A ニ對シ一意ニ定義サレテヰテ、此レ等ガ次ノ諸関係ヲ満タスモノトスル。

加法 S_1 $A+B=B+A$

S_2 $(A+B)+C=A+(B+C)$

S_3 $A+0=A$ (0ナル集合, 空集合)

乗法 P_1 $AB=BA$

P_2 $(AB)C=A(BC)$

P_3 $A0=0$

分配律 D $A(B+C)=AB+AC$

餘法 C_1 $A^{cc}=A$

C_2 $AA^c=0$

C_3 $(A+B)^c=A^cB^c$, $(AB)^c=A^c+B^c$

C_4 $AB^c=0$ & $BA^c=0 \longrightarrow A=B$

(又ハ $A\subset B$ & $B\subset A \longrightarrow A=B$)

（$AB^c = 0$ ノコトヲ $A \subset B$ ト書クノデアル。⊂ノ定義也！）

閉法 A_1 $A^{aa} = A^a$

A_2 $(A+B)^a = A^a + B^a$

A_3 $AA^{ac} = 0$ （即チ $A \subset A^a$）

（定義 $A = A^a$ ナル如キ集合 A ヲ閉集合ト云フ）

（備考） 1) C_3 ハ両式中イヅレカ一方ヲ仮定スレバヨイ。

2) $A \subset B$ ノ記号ハ用ヒズニ $AB^c = 0$ デ押トホセルガ ⊂ ヲ用ヒタ方ガワカリ易イ。實際ハ両者混用スル。

3) AB^c ハ通常 $A - B$ ト書カレル。然シ $A - B + B$ ハ A デハナイノデアルカラ取扱ヒ難イ。

$A - B + B = AB^c + B = A + B$ （§2, (6) 参照），

$A + B - B = (A+B)B^c = AB^c + BB^c = AB^c$

$= A - B$ ヲ比較シテ見ルト不便サガワカル。

§2. 先ヅ準備トシテ簡単ナ式ヲ導イテ見ヨウ。

(1) $AB \subset A \subset A + B$

（証） 左式ハ ⊂ ノ定義ニヨツテ $AB \cdot A^c = 0$ ノコトデ，コレガ正シイコトハ

$$\cdot \quad AB \cdot A^c = AA^c \cdot B \underset{C_2}{=} 0 \cdot B = 0$$

同様ニ

$$A(A+B)^c \underset{C_3}{=} A \cdot A^c B^c = AA^c \cdot B^c = 0 \to A \subset A + B$$

(2) $A + AB = A$, $A(A+B) = A$

(証) (1) $\rightarrow A + AB \supset A.$

又 $\cdot (A+AB)A^c = AA^c + ABA^c = 0$

$\rightarrow A + AB \subset A.$　故ニ $A + AB = A.$

右式モ同様ニ出ル。

(3) $A + A = A,\quad AA = A$

(証略)

(4) $A(B + B^c) = A$

(証) (1) $\rightarrow A(B + B^c) \subset A$

次ニ $A\,(A\,(B+B^c))^c \underset{C_3}{=} A\,(A^c + (B+B^c)^c)$

$= AA^c + AB^cB = 0$

$\rightarrow A \subset A(B + B^c)$

由ツテ C_4 ニヨリ両者ハ等シイ。

(備考) 一般ニ $A + A^c$ ハ 0^c デ、空間全体ニ當ル。通常 1, e 等デ表ハスガ、実際使フトキハ (4) ノ形ダケデアルカラ，ソンナ文字ヲ用キルニ及バナイ。使ヒ方ハ例ヘバ次ノ等値式ノ証明デワカル。(〜ハ同意義 $\rightleftarrows$ ノコト)

(5) $(A \subset B) \sim (AB^c = 0) \sim (AB = A) \sim (A + B = B)$

(証) i) $AB^c = 0 \rightarrow A = A(B + B^c) = AB + AB^c = AB + 0 = AB.$

$AB = A \rightarrow A \cdot B^c = AB \cdot B^c = A \cdot BB^c = 0$

$\therefore\ AB^c = 0 \sim AB = A$

ii) $AB^c = 0 \rightarrow A + B \underset{(4)}{=} A(B + B^c) + B = (AB + AB^c) + B$

$= AB + B \underset{(2)}{=} B$

$A + B = B \rightarrow AB^c = A(A+B)^c = A \cdot A^cB^c = 0$

$$\therefore \quad AB^c = 0 \ \sim \ A + B = B$$

次ニ便利ナ式トシテ

(6) $AB^c + B = A + B$

(証) $AB^c + B \underset{(2)}{=} AB^c + (AB + B) = (AB^c + AB) + B$

$$= A(B^c + B) + B \underset{(4)}{=} A + B$$

(5)ノ等値式ヲ使フト次式ガ出ル。

(7) $A \subset B \rightarrow A^a \subset B^a$

(証) $A \subset B \rightarrow A + B = B \underset{A_2}{\rightarrow} A^a + B^a = B^a \rightarrow A^a \subset B^a$.

餘法デハ (6) ト逆ニ

(8) $A \subset B \rightarrow A^c \supset B^c$

(証) $A \subset B \sim AB^c = 0 \underset{C_1}{\rightarrow} A^{cc}B^c = 0 \sim A^c \supset B^c$.

是レ等カラ直チニ

(9) $A \subset B \rightarrow A^{cac} \subset B^{cac}$

ガ出ル。A^{cac} トハ A ノ内部ノコトデアル。$I(A)$ トカ A^i

トカ書ク。 cac ニツイテハ更ニ次式ガ成立ツ。

(10) $(AB)^{cac} = A^{cac} \cdot B^{cac}$ (積ノ内部 = 内部ノ積)

(定義) $A = A^{cac}$ ナル A ヲ開集合トイフ。

(11) $U = U^{cac}$ (即チ U ハ開集合) $\rightarrow (AU)^a \supset A^a U$.

ヨク使フ式デアル。

(証) $(AU)^{ac} \cdot A^a U = 0$ ヲ証スレバヨイ訳デアル。

$U = U^{cac}$ ヲ入レルト

$$(AU)^{ac} A^a \cdot U^{cac} = (AU)^{ac} U^{cac} \cdot A^a$$

$$\underset{C_3, A_2}{=\!=} (AU + U^c)^{ac} A^a \underset{(6)}{=} (A + U^c)^{ac} A^a$$

$$= A^{ac} U^{cac} \cdot A^a = A^{ac} A^a \cdot U^{cac} \underset{C_2}{=} 0$$

(12) $U=U^{cac}$ (U ハ開) $\longrightarrow (AU)^a=(A^aU)^a$

(証) $AU \subset A^aU$ ヨリ $(AU)^a \subset (A^aU)^a$. コレト(11)
トカラ出ル。

次ニ A^{acac} ナル *operation* ヲ考ヘヨウ。